

Universidade de São Paulo - São Carlos (SP)

Monopolos Magnéticos

Aluno: Gabriel Fukamoto Magno, nº 8928152

Disciplina: Eletromagnetismo A

Docente: Prof. Dr. Philippe Wilhelm Courteille



IFSC UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Introdução

- Há razões teóricas sólidas para acreditar que o monopólio magnético deve existir:
 - Tornar as equações de Maxwell mais simétricas (sistema c.g.s de unidades).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e$$

- Condição de quantização de Dirac para um monopólio magnético de carga g .

$$eg = n \frac{\hbar c}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Eletromagnetismo na Mecânica Quântica

- Campos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, independentes de t , são relacionados com os potenciais escalar $\phi(\mathbf{r})$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ por:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- Transformação de gauge: função $\chi(\mathbf{r})$ produz $\tilde{\phi}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ que geram os mesmos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} \quad ; \quad \mathbf{A} + \nabla\chi \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}.$$

- Dados ϕ e \mathbf{A} , o Hamiltoniano da partícula, massa m e carga q , é:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi.$$

- Se a função de onda $|\Psi(t)\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger com o Hamiltoniano acima, então a função de onda

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \exp\left(\frac{iq\chi}{\hbar c}\right) |\Psi(t)\rangle$$

também satisfaz a equação de Schrödinger para uma transformação de gauge dada por χ .

J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics (Addison-Wesley Publishing Company, 1994, pg. 130).

Potencial Vetor do Monopolo

- Um monopolo magnético de carga g na origem produz um campo radial $\mathbf{B}_{\text{mon}} = \left(\frac{g}{r^2}\right) \hat{\mathbf{r}}$. Um possível potencial vetor, em coordenadas esféricas é:

$$\mathbf{A}_{\text{Dir}} = \frac{g(1 - \cos\theta)}{r^2 \sin\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

chamado *potencial vetor de Dirac*, que é singular para toda uma linha $\theta = \pi$, a *corda de Dirac*.

- Adicionamos um solenoide infinitesimalmente fino, estendido infinitamente ao longo do Oz negativo, para abordar o problema:

$$\nabla \times \mathbf{A}_{\text{Dir}} = (g/r^2) \hat{\mathbf{r}} + 4\pi g \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}$$

Potencial Vetor do Monopolo

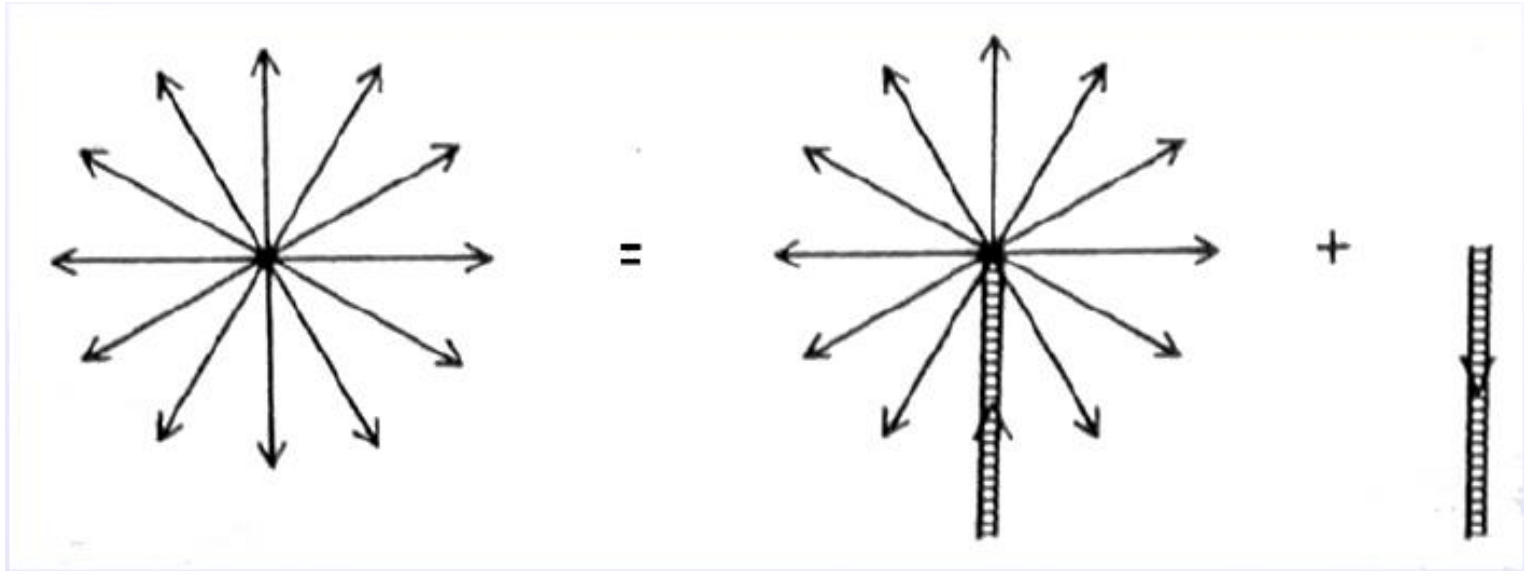


Figura 1: Modelando o monopolo como um fino solenoide semi-infinito ao longo do eixo z negativo.
R. Schmitz, Seminar on Theoretical Particle Physics (Univ. of Bonn, 2006).

$$\mathbf{B}_{\text{mon}} = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{Dir}} - 4\pi g \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}$$

Solenóide Semi-Infinito

- Só faz sentido identificarmos esse solenoide fino semi-infinito como um monopolo magnético se ele for completamente não físico, ou seja, indetectável.
 - Em particular, *não produzir nenhum deslocamento de fase* em um experimento do tipo Aharonov-Bohm.
- Modelo: casca cilíndrica estendida em $z \in [0, \infty)$, com seção transversal S e corrente azimutal por unidade de comprimento λ .
 - Cada anel de corrente do solenoide entre z e $z + dz$ produz um momento de dipolo $d\mathbf{m} = \frac{\lambda dz S \hat{z}}{c}$, assim:

$$d\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \rightarrow \mathbf{A} = \int_0^{-\infty} \frac{\lambda S \sin\theta'(z')}{cr'^2(z')} \hat{\boldsymbol{\phi}} dz' = \left(\frac{\lambda S}{c} \right) \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

identificamos $\mathbf{g} \equiv \lambda S/c$.

Solenóide Semi-Infinito

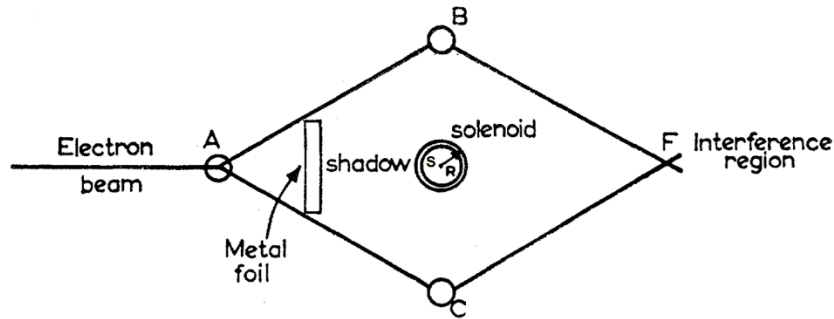


Figura 2: Detecção da presença do solenoide via efeito Aharonov-Bohm. As trajetórias do elétron circundam o solenoide.

Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev 115, 485 (1959).

- Utilizando agora um experimento de dupla-fenda com elétrons, a diferença de fase entre funções de onda de elétrons, adquirida quando os eles são transportados por um caminho fechado que circunda o solenoide deve ser trivial:

$$\exp \left[\frac{-ie}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] = \exp \left[\frac{-ie\Phi_B}{\hbar c} \right] = 1$$

onde e é a carga do elétron e $\Phi_B = 4\pi g$.

$$eg = n \frac{\hbar c}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Invariância por Transf. de Gauge

- A corda de Dirac é considerada um fator embaraçoso na teoria do monopolo, portanto gostaríamos de eliminá-la. O truque é:

$$A_\phi = \begin{cases} A_\phi^{\text{sup}} = g(1 - \cos\theta)/r\sin\theta; \theta \in [0, \pi/2] \\ A_\phi^{\text{inf}} = -g(1 + \cos\theta)/r\sin\theta; \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

- Para $\theta = \pi/2$, A_ϕ^{sup} e A_ϕ^{inf} **descrevem a mesma física**, \therefore diferem por uma transf. de gauge:

$$\nabla\chi = A_\phi^{\text{sup}}(\theta = \pi/2) - A_\phi^{\text{inf}}(\theta = \pi/2) = \frac{2g}{r\sin\theta} \hat{\phi} \rightarrow \chi = 2g\phi$$

- Quando um e^- é transportado pela região do equador, a **mudança na sua fase** da função de onda é **bem definida**:

$$\exp\left(\frac{2ieg\phi}{\hbar c}\right)\Big|_{\phi=0} = \exp\left(\frac{2ieg\phi}{\hbar c}\right)\Big|_{\phi=2\pi} \rightarrow eg = n \frac{\hbar c}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Níveis de Landau

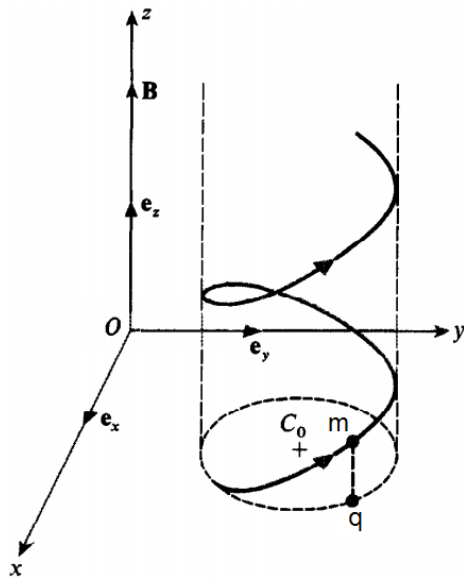


Figura 3: No caso elétrico, trajetória clássica de uma partícula carregada (q, m) em um campo magnético uniforme paralelo ao eixo z . C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics, Volume 1* (Wiley, 1991).

- Um monopolo magnético de carga g e massa m dentro de um capacitor de placas paralelas ao plano xy , que produz $\mathbf{E} = E\hat{z}$. Considere que o monopólo só tem componentes de velocidade no plano xy .

- **Quantizado** o Hamiltoniano clássico, o monopólo terá energias

$$H = \hbar\omega_c(n + 1/2),$$

$$\omega_c = gE/mc \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

- Consideramos o **regime semi-clássico** ($n + 1/2 \rightarrow n$). Força de Lorentz é igual a resultante centrípeta.

$$E = \frac{mvc}{rg}$$

- Momento angular $J_z = 2\hbar n$.

Níveis de Landau

$$E = J_z \frac{c}{r^2 g} = \frac{\hbar c}{r^2 g} 2n$$

- A magnitude do campo elétrico entre as placas é dada por $E = 4\pi\sigma$, σ é a densidade de cargas sobre as placas. Se $\pm Q$ é a carga em cada placa diretamente acima ou abaixo da órbita, então $Q = \pi r^2 \sigma$.

$$E = 4Q/r^2 \quad ; \quad Q = \frac{\hbar c}{2g} n$$

- Como Q é quantizado em unidade de e então g deve também o ser, só que em unidades de $\hbar c/2e$. Ilustra uma **conexão concreta** entre quantização de carga elétrica com quantização de carga magnética.

Spin-ice

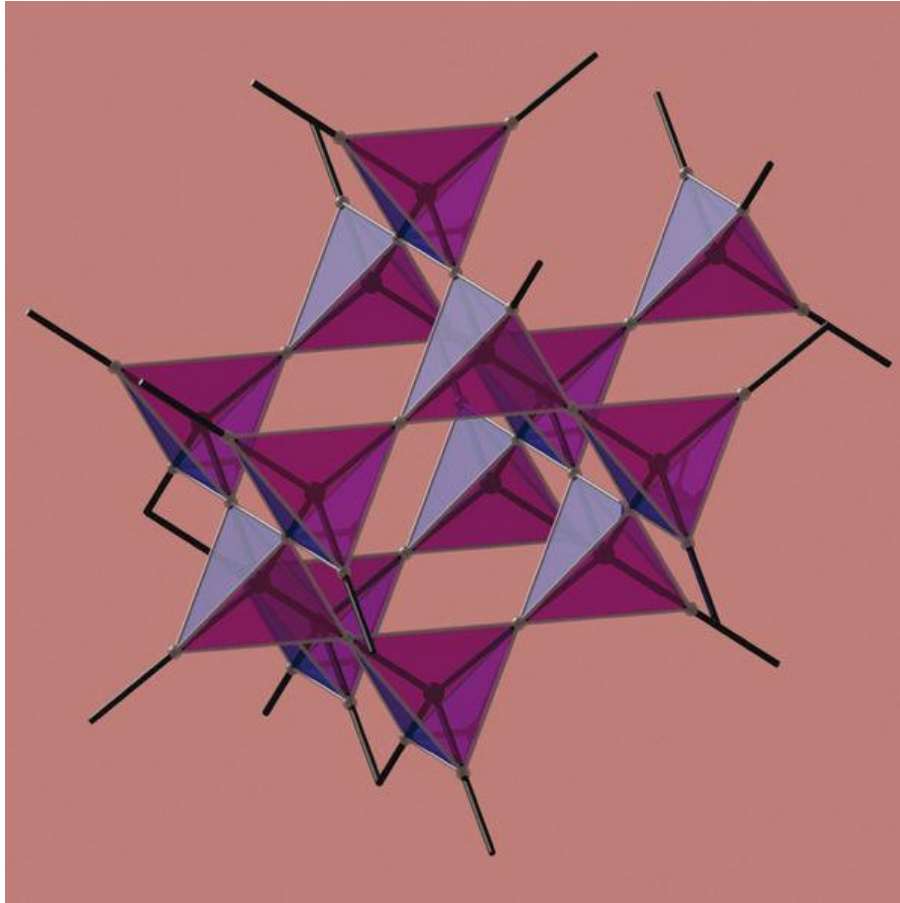


Figura 4: Rede pirocloro do spin ice. Cada spin reside ao longo de um eixo paralelo a uma das linhas pretas, que adentram o tetraedro pelos vértices e intersectam o seus centro. C. *Castelnovo, R. Moessner and S. L. Sondhi, Nature 451, 42 (2008).*

Spin-ice

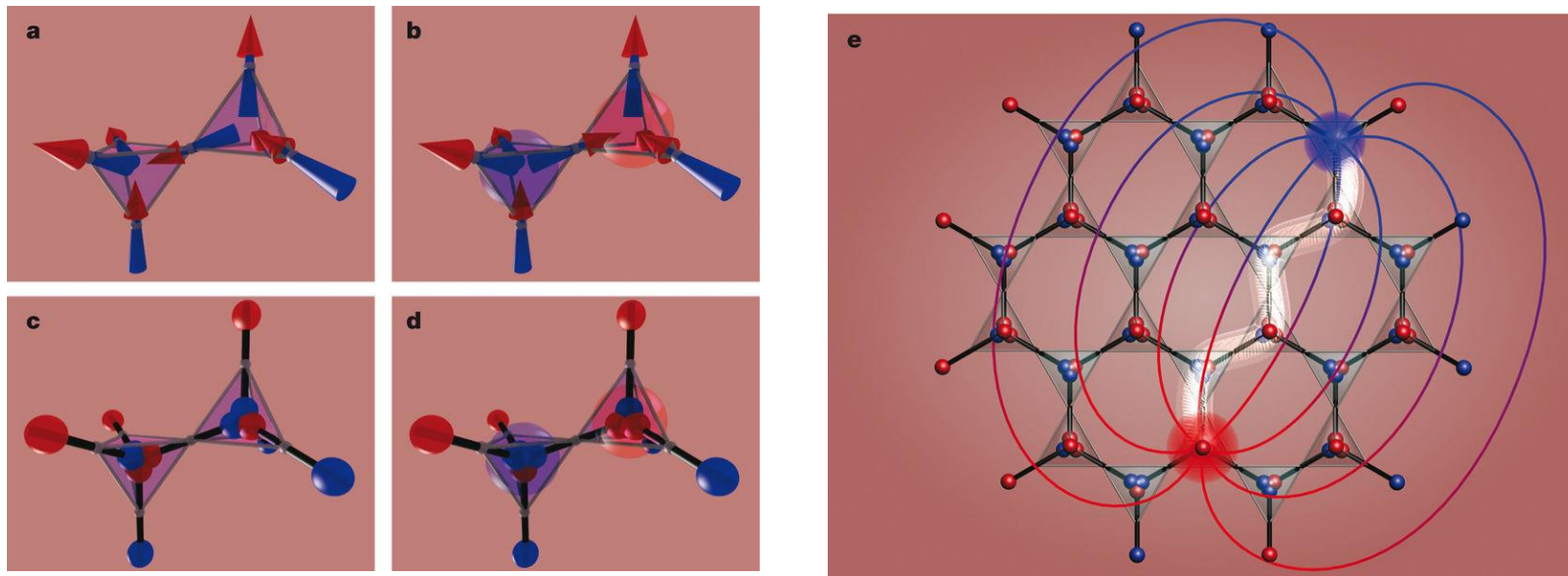


Figura 5: **(c, d)** são obtidas ao substituir cada spin em **a** e **b** por um par de cargas magnéticas opostas colocadas nos sítios mais adjacentes da rede. Em **(a, c)**, as vizinhanças obedecem a regra do gelo, com dois spins apontando para dentro e dois para fora, dando carga magnética líquida zero em cada sítio. Já em **(b, d)**, invertendo o spin compartilhado, um par de monopolos magnéticos aparece (sítios com carga magnética líquida), esta configuração tem um grande momento magnético. **e** mostra um par de monopolos separados (esferas vermelha e azul destacadas) por uma linha de dipolos conectados ('corda de Dirac') entre eles, destacada em branco, as linhas de campo também estão representadas. C. Castelnovo, R. Moessner and S. L. Sondhi, *Nature* 451, 42 (2008).

Um Panorama Geral

Conclusão

- Joseph Polchinski: “a existência de monopolos magnéticos parece ser uma das ***apostas mais seguras*** que se pode fazer sobre a física ainda não observada”. *J. L. Pinfold, AIP Conf. Proc. 1304, 234 (2010).*

Muito Obrigado!